

解答

(1) $f(x) = \frac{x}{e} - \log x$ ($x > 0$) とする。

$$f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \frac{x - e}{ex}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

これより、 $x > 0$ において $f(x) \geq f(e) = 0$ となるから

$$\frac{x}{e} \geq \log x.$$

(2) (1) の不等式において $x = \frac{20}{e^2}$ とおくと

$$\frac{20}{e^3} \geq \log \frac{20}{e^2} = \log 20 - 2$$

であるから

$$\log 20 \leq 2 + \frac{20}{e^3}.$$

ここで $2.71 < e$ であるから、特に $e > 2.7$ となり、 $e^3 > 2.7^3 = 19.683$ である。したがって

$$\frac{20}{e^3} < \frac{20}{2.7^3} = \frac{20}{19.683} = 1.016 \cdots < 1.02.$$

よって

$$\log 20 \leq 2 + \frac{20}{e^3} < 2 + 1.02 = 3.02,$$

すなわち

$$\log 20 < 3.02. \quad \blacksquare$$

コメント

解答例だけを見ると、唐突に $\frac{20}{e^2}$ という謎の値を代入しているように見えますが、これは $y = \frac{x}{e}$ のグラフと $y = \log x$ のグラフの位置関係を考えると、なぜこの値を用いるのかが分かります。

というのも、これら2つのグラフは下図のように $x = e$ で接しているため（これは(1)の増減表を見れば気付けます）、2つの関数の値の差は、 x の値が e に近いほど小さくなります。

したがって、(1)で示した不等式を使って近似を行う際には、 x に $e \approx 2.71$ に近い値を代入する必要があります。そこで、 x に20を直接代入するのではなく、 $e^3 \approx 20$ であることを踏まえて $\frac{20}{e^2} (\approx e)$ という値を代入することで、はじめて目標の評価が得られます——というのがこの解答の種明かしです。

