

解答

$$AB = BC = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ より}$$

$$\triangle ABC \text{ は二等辺三角形であるから, } \angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{6} \cdots \cdots ①$$

$$\text{また, 与えられた条件より, } \angle ACD = 2\angle BCA = \frac{\pi}{3} \cdots \cdots ②$$

$$\text{ここで, } AC = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \cos \frac{\pi}{6} = 2 = CD \cdots \cdots ③$$

②, ③ より $\triangle ACD$ は正三角形であるから

$$\angle CAD = \frac{\pi}{3} \cdots \cdots ④, \quad AC = AD \cdots \cdots ⑤$$

①, ②, ④ より

$$\angle BCD + \angle BAD = \angle BCA + \angle ACD + \angle BAC + \angle CAD = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \pi$$

よって, 四角形 $ABCD$ は外接円を持つ……☆

また ③ より, 三辺が等しいから $\triangle ABC \equiv \triangle AED$

$$\text{ゆえに, } \angle AED = \angle ABC = \frac{2\pi}{3} \cdots \cdots ⑥$$

②, ⑥ より

$$\angle ACD + \angle AED = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$$

よって, 四角形 $ACDE$ は外接円を持つ……☆☆

3点 A, C, D を通る円はただ1つしか存在しないから, ☆ の外接円と ☆☆ の外接円は同一のものであり, この円は五角形 $ABCDE$ の外接円となる。よって, 五角形 $ABCDE$ に外接する円は存在する。 ■

<コメント>

問題文で「五角形の外接円」といわれてどうしたものか…と思った方も多かったかもしれません。

しかし、三角形や四角形の性質については教科書にも数多く載っており、私たちはこれらについては多くのことを知識として持っています。であれば、五角形の問題であっても、このよく知った三角形や四角形の土俵に持ち込むような方針でいけば、十分に解答することができるのです。なぜなら、五角形は三角形や四角形に分割できるからです。

今回は具体的な数値条件が多く与えられているので、力づくで座標を設定し、5点から等距離にある点の存在を示すという方針も考えられます。ただし、その方法では計算がそこそこ煩雑になってしまうかもしれません。

実際には、解答例のように進めれば、中学数学に少し毛が生えた程度の知識で、無理なく解くことができます。未知の問題に見える五角形の外接円の問題が、まさかこんなにあっさり解けてしまうなんて、驚きですね。