

解答

$x = t + n\pi$ とおくと, $dx = dt$ であり, x が $n\pi$ から $(n+1)\pi$ まで動くとき, t は 0 から π まで動く。また

$$\sin x = \sin(t + n\pi) = (-1)^n \sin t$$

であるから,

$$I_n = \int_0^\pi \frac{(t + n\pi) \sin(t + n\pi)}{\sqrt{(t + n\pi)^2 + 1}} dt = (-1)^n \int_0^\pi \frac{(t + n\pi) \sin t}{\sqrt{(t + n\pi)^2 + 1}} dt$$

ここで, $0 \leq t \leq \pi$ のとき $\sin t \geq 0$ であり, また $n \geq 1$ より $t + n\pi \geq n\pi > 0$ であるから, 被積分関数

$$\frac{(t + n\pi) \sin t}{\sqrt{(t + n\pi)^2 + 1}}$$

は区間 $[0, \pi]$ 上で常に 0 以上である。よって上の積分の値は 0 以上であり, I_n の符号は $(-1)^n$ と一致する。したがって

$$|I_n| = \int_0^\pi \frac{(t + n\pi) \sin t}{\sqrt{(t + n\pi)^2 + 1}} dt \quad \cdots \textcircled{1}$$

次に, $x > 0$ に対して $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ とおく。分母・分子を x で割ると,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

となる。 $\frac{1}{x^2}$ は $x > 0$ で単調減少であるから, $g(x)$ は $x > 0$ で単調増加であり, かつ常に $g(x) < 1$ を満たす。

$t \in [0, \pi]$, $n \geq 1$ のとき, $x = t + n\pi$ は

$$n\pi \leq t + n\pi \leq (n+1)\pi$$

を満たすから, g の単調増加性より

$$g(n\pi) \leq g(t + n\pi) < 1$$

$0 \leq t \leq \pi$ において $\sin t \geq 0$ であるから, 各辺に $\sin t$ を掛けても不等号の向きは変わらず,

$$g(n\pi) \sin t \leq g(t + n\pi) \sin t \leq \sin t$$

この式を t について 0 から π まで積分すると, $\textcircled{1}$ より

$$g(n\pi) \int_0^\pi \sin t dt \leq |I_n| \leq \int_0^\pi \sin t dt$$

$$\int_0^\pi \sin t dt = [-\cos t]_0^\pi = 2 \text{ であるから,}$$

$$2g(n\pi) \leq |I_n| \leq 2$$

ここで,

$$g(n\pi) = \frac{n\pi}{\sqrt{(n\pi)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(n\pi)^2}}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より, $2g(n\pi) \rightarrow 2$ ($n \rightarrow \infty$) である。左辺・右辺がともに 2 に収束するから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 2 \quad \cdots \text{ (答)}$$

<コメント>

この問題は、私が [GeoGebra](#) で遊んでいたときに、テキトーに書いたグラフを見て、たまたま思いついたものです。表示されたグラフを見て、 x 軸とこの関数で囲まれた図形の面積って収束しそうじゃない？と直感してみて、AI くん聞いてみたところ、その直感、見事に的を射ています！とほめられました(AI くんはすぐに人間をおだてる癖がありますね…)。そのことを示すのに、 $\ln$ を、置換積分をつかって積分区間の変更をするアイディアは、AI くんからもらいました。この問題は、このアイディアを使えると非常にそのあときれいに議論することができ、オーソドックスな不等式評価→はさみうちの原理で答えを導けます。ということは、この問題、AI くんが作った部分が圧倒的に大きいですね。おそろべし、AI くん。まあ、でも、割と、東大とかでもありそうな、ちょうどいいくらいの難易度の積分を用いた極限問題になったし、気に入っています。

ちなみに、収束しそうじゃない？とは、上に書いたように、視覚的にそう思ったんですが、ちょっと考えれば、 $g(x)$ の x を無限に飛ばせば、1 に収束することは自明なのだから、最初の定積分は n がでかければ事実上 $\sin x$ の定積分と見なせるわけです。そりゃ収束するわなって、あとになって気が付きました。きっと、数学出来る人は、こういう状況判断が一瞬で出来てしまうんだろうな、と自分の気づきの遅さに少しもどかしさを感じたものです。